SUR LA THÉORIE DE LA LUNE

LETTRES

DE JEAN PLANA À M.r JOHN W. LUBBOCK

Communiquées à l'Académie des Sciences de Turin le 25 Novembre 1860.



TURIN
DE L'IMPRIMERIE ROYALE
1860

Turin, 12 Juin 1860.

Mon cher M.r LUBBOCK ?

En continuation de ma lettre du 10 courant, permettez-moi de Vous faire observer que, à la page 15 de mon Supplément, il y a l'équation [16], qui fournit le terme $-\frac{285}{8}m^4e'^2$, dont M.r ADAMS parle à la page 235 du N.° 6 des *Monthly Notices*. Il fallait donc dire, que je n'ai *pas voulu* conserver ce terme dans le coefficient de l'équation séculaire. Mais, publier que la différence entre mon résultat et le sien « arises in the way » J have explained; ..... from his having *neglected* to take in to account » the term $-\frac{285}{8}m^4e'^2$ » est, de la part de M.r ADAMS, une déclaration trop infidèle pour être approuvée par les Lecteurs de son Mémoire, capables de faire l'*anatomie* de tels calculs.

Ces Lecteurs, en lisant la page 6 de mon Supplément, ne seront pas disposés à croire que la correction, par moi faite d'une *faute typographique*, donnait à M.r ADAMS le droit d'exprimer sa critique par les mots « he admitted that his theory was wrong on this point ». Il était facile de tempérer cette phrase en demeurant entre les limites de la stricte vérité. M.r ADAMS pouvait publier tout ce que bon lui semble pour nier le principe d'après lequel j'ai *voulu supprimer* le terme $\frac{855}{16}m^4e'^2$, qu'on obtient en multipliant par $\frac{3}{2}$ celui donné par mon équation [16]. Voilà le point théorique sur lequel porte la discordance. Mais vouloir tirer parti de l'innocente faute typographique qu'il y avait à la page 61 du premier Volume de mon ouvrage pour le déprécier, par un récit infidèle de cette cause et de ses effets, est une action qui ne serait pas approuvée par des Juges compétens tels que EULER, LAGRANGE et Tobie MAYER. Au reste, je m'en rapporte à votre jugement, et à celui de tous les Savans Anglais.

Quelle que soit la précision qu'on veut attribuer aux Tables de la Lune de M.r HANSEN, je ne puis m'empêcher de considérer son ouvrage comme un *pas rétrograde* sous le rapport de la Théorie. Il ne suffit pas

de donner la *valeur numérique* des inégalités plus ou moins sensibles; il faut encore expliquer par quelles combinaisons l'abaissement de l'ordre, dû à l'intégration, laisse néanmoins insensibles certaines inégalités.

Par exemple; mon équation

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = \cos. 2gv - 2cve^2\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4}\right) m^0 + \left(\frac{135}{32} - \frac{135}{32} = 0\right) m \\ + \left(\frac{157}{256} + \frac{3}{256} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8}\right) m^2 \\ + \left(\frac{3}{8} - \frac{7}{32} + \frac{7}{16} + \frac{5}{32} = \frac{3}{4}\right) \gamma^2 \\ + \left(\frac{27}{32} - \frac{11}{32} - \frac{19}{32} - \frac{21}{32} = -\frac{3}{4}\right) e^2 \end{array} \right\},$$

que Vous voyez à la page 147 de mon second Volume, me paraît constituer un pas important pour avancer cette théorie : elle donne

$$nt = \delta nt + \frac{3}{4} e^2 \gamma^2 (1 - \gamma^2 + e^2) \frac{\sin. (2gv - 2cv)}{2g - 2c} \; ,$$

ainsi il est démontré qu'en ajoutant la perturbation avec la valeur elliptique il en résulte :

$$nt = \frac{\sin. (2gv - 2cv)}{2g - 2c} . \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0\right) m^0 + 0 . m - \frac{3}{8} m^2 \\ - \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0\right) \gamma^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0\right) e^2 \end{array} \right\} ;$$

vouloir l'oublier, vouloir le méconnaître, est une de ces injustices que la postérité venge, en blâmant le jugement, ou les passions des contemporains qui l'auraient commise. NEWTON, ne s'est pas fait scrupule de nommer KEPLERUS comme Auteur des *Tourbillons*, aussi bien que CARTESIUS; mais la postérité repousse un tel rapprochement. Le chapitre XXXIV *De Stella Martis* est un immortel trait de lumière lancé par KEPLERUS, tandis que les idées de CARTESIUS attestent toute l'aberration de son imagination. NEWTON en écrivant, dans son Opuscule *De Mundi Systemate*, la phrase : « Philosophi recentiores aut vertices esse volunt, ut KEPLERUS et » CARTESIUS etc. », a commis un acte de profonde ingratitude envers le génie qui lui avait livré la découverte de la gravitation universelle.

Je livre toutes ces réflexions à votre intelligence et à votre amitié

envers moi, en Vous laissant libre d'en faire l'usage que Vous croirez plus convenable.

Tout à Vous etc.

Turin, 14 Juin 1860

Mon cher M.r LUBBOCK?

J'ai pensé, que ma lettre du 12 avait besoin d'une autre explication de ma part. Pour mieux fixer à quoi tient la discordance entre mon résultat et celui de M.r ADAMS, relativement au second terme du coefficient de l'équation séculaire; considérons le coefficient différentiel $\frac{d.\delta nt}{dv}$ de la longitude moyenne en fonction de la longitude vraie de la Lune désignée par v. Si nous faisons $\delta u = m^2.\Delta u$, il résulte de l'analyse exposée dans mon Supplément, que, en voulant tenir compte des termes séculaires, nés des termes périodiques appartenans à la fonction Δu, on aura d'abord l'équation

$$(1) \ldots \frac{d.\delta nt}{dv} = \left\{ \frac{3}{2}m^2 - \left(\frac{2187}{128} - \frac{1485}{128} = \frac{351}{64} \right) m^4 \right\} (\varepsilon'^2 - E'^2)$$

$$+ 36m^4 \int dv.\Delta u \left\{ \sin.2Ev - \frac{1}{2}\varepsilon' \sin.(2Ev + c'mv) + \frac{7}{2}\varepsilon' \sin.(2Ev - c'mv) \right\}.$$

Soit, pour un moment,

$$(2) \ldots\ldots \quad \frac{d^2.\Delta u}{dv^2} - \left(1 - \frac{3}{2}m^2 \right) \Delta u = \text{Fonct.}(v, \varepsilon')$$

l'équation différentielle qui détermine Δu. S'il était possible de l'intégrer, *sans suivre* la méthode des approximations *successives*, et l'on trouvait, qu'en ayant égard seulement aux trois argumens $2Ev$, $2Ev + c'mv$, $2Ev - c'mv$, et au coefficient différentiel $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, l'on a, par un *procédé incontestable;*

$$(3) \ldots \Delta u = \cos.2Ev - \frac{1}{2}\varepsilon' \cos.(2Ev + c'mv) + \frac{7}{2}\varepsilon' \cos.(2Ev - c'mv)$$

$$+ \frac{95}{12} \cdot \frac{\varepsilon' d\varepsilon'}{dv} \sin.2Ev + \frac{19}{24} \cdot \frac{d\varepsilon'}{dv} . \sin.(2Ev + c'mv)$$

$$- \frac{133}{24} \cdot \frac{d\varepsilon'}{dv} \sin.(2Ev - c'mv) \; ;$$

alors, la partie affectée du signe intégral dans le second membre de l'équation (1) donnerait les termes

$$(4)\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} 2m^4 \int dv \left(\frac{285}{4} - \frac{57}{16} - \frac{2793}{16} \right) \cdot \frac{\varepsilon' d\varepsilon'}{dv} \\ = -m^4 . \frac{855}{16} \cdot \int dv . 2\varepsilon' \frac{d\varepsilon'}{dv} = -\frac{855}{16} m^4 (\varepsilon'^2 - E'^2) \end{array} \right\} ;$$

et l'équation (1) donnerait

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = \left(\frac{3}{2} m^2 - \frac{351}{64} m^4 \right) (\varepsilon'^2 - E'^2) - \frac{855}{16} m^4 (\varepsilon' - E'^2) \ ;$$

c'est-à-dire

$$(5)\ldots\ldots \quad \frac{d.\delta nt}{dv} = \left(\frac{3}{2} m^2 - \frac{3771}{64} m^4 \right) (\varepsilon'^2 - E') \ .$$

C'est le résultat de M.r ADAMS: moi, je ne puis le croire exact; parceque le mode d'intégration, par lequel on obtient dans Δu les trois termes multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ est fondé sur le principe du partage de la fonction Δu en plusieurs parties

$$\Delta u = \Delta' u + \Delta'' u + \Delta''' u + \text{etc.}$$

d'un ordre de petitesse successivement croissante. Or, on ne peut fixer l'ordre de petitesse de $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ relativement à ε'. Il faut, à mon avis, un mode d'intégration, analogue à celui employé par LAGRANGE dans le Tome 3.ème des *Miscellanea Taurinensia* (page 300-318), pour empêcher le mélange des quantités *séculaires* avec les inégalités périodiques. Si avec une telle méthode on parvenait à l'équation (3), il faudrait accepter l'équation (4). Car, en posant

$$\varepsilon'^2 = H \sin. (\beta_{(1)} v + \alpha_{(1)}) + H_{(2)} \sin. (\beta_{(2)} v + \alpha_{(2)}) + \text{etc.} \ ;$$
$$\varepsilon'^2 = \Sigma . H_{(i)} \sin. (\beta_{(i)} v + \alpha_{(i)}) \ ;$$

l'on aura dans le second membre de l'équation (1):

$$2\varepsilon' \frac{d\varepsilon'}{dv} = \Sigma . \beta_{(i)} H_{(i)} \cos. (\beta_{(i)} v + \alpha_{(i)}) \ ;$$

et les fonctions

$$18m^4\int dv\cdot\frac{95}{12}\cdot\sin.2Ev.\Sigma.\beta_{(i)}H_{(i)}\cos.(\beta_{(i)}v+\alpha_{(i)})\ ;$$

$$18m^4\int dv\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{\sin.(2Ev+c'mv)}{\varepsilon'}\cdot\Sigma.\beta_{(i)}H_{(i)}\cos.(\beta_{(i)}v+\alpha_{(i)})\ ;$$

$$-18m^4\int dv\cdot\frac{133}{24}\cdot\frac{\sin.(2Ev-c'mv)}{\varepsilon'}\cdot\Sigma.\beta_{(i)}H_{(i)}\cos.(\beta_{(i)}v+\alpha_{(i)})\ ,$$

étant multipliées par

$$\sin.2Ev-\frac{1}{2}\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv)+\frac{7}{2}\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv)\ ,$$

produiraient la partie $-\frac{855}{16}m^4(\varepsilon'^2-E'^2)$, sur laquelle porte principalement cette discussion. Quelle que soit l'opinion de Mr Adams, sur cette explication de ma part, elle prouve du moins que sa phrase « from his » having *neglected* to take into account the term $-\frac{285}{8}m^4e'^2$ » ne rend pas avec fidélité l'analyse exposée dans mon Supplément. Il paraît que M.^r De Pontécoulant ignore l'existence de ce Supplément. Je lui en ai envoyé un exemplaire, par la Poste, depuis quatre jours. Il n'en fait pas mention dans ses Observations, ni dans son Mémoire publié dans le N.° 7 des *Monthly Notices* Vol. XX, que je viens de recevoir.

Ce qu'il dit à la page 274: « Quant à Mr Adams etc. » me paraît prouver que M.^r De Pontécoulant ne voit pas encore à quoi tient la source de la discordance entre Mr Adams et moi. L'espèce d'anatomie de l'équation (1), que je viens de vous exposer dans cette lettre, est une découverte qui lui reste à faire.

N'oubliez pas de corriger à la page 44 de mon Supplément la lettre β par B avant le sigue $.\Sigma.$ dans le second membre de l'équation (D'); et à la page 45, dans le second membre de l'équation (D^{IV}), il faut lire $2kg$, au lieu de $2k$ dans le second terme.

Je viens de recevoir Vos deux lettres du 4 et 6 Juin, imprimées, par lesquelles votre juste réclamation est noblement faite ....; cette justice ne sera pas rendue; mais nous pourrons répéter comme Caton: « Victrix causa Diis placuit, sed victa Catoni ».

Croyez aux sentimens de haute estime etc.

Turin, 17 Juin 1860.

Mon cher M.r LUBBOCK?

Après Vous avoir écrit ma lettre datée du 14 Juin, j'ai fait une réflexion nouvelle pour moi. Soit

$$(1) \ldots \quad \frac{d.\delta nt}{dv}=H(\varepsilon'^2-E'^2)+\int dv.P\Delta u+\int dv.Q.\delta nt \; .$$

En différentiant les deux membres l'on a:

$$(2) \ldots\ldots \quad \frac{d^2.\delta nt}{dv^2}=2H.\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}+P\Delta u+Q.\delta nt \; .$$

Il suit de là, que, si les produits $P\Delta u$, $Q.\delta nt$ renferment des termes séculaires de la forme

$$H'.2\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}=P\Delta u \; , \qquad H''.2\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}=Q.\delta nt \; ,$$

il faudra les ajouter au premier $2H\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}$, qui a été calculé, *sans* avoir égard aux termes *périodiques* de Δu et δnt, dont les coefficiens auraient $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ pour un de leurs facteurs. Alors on aura

$$\frac{d.\delta nt}{dv}=H\varepsilon'^2+H'\varepsilon'^2+H''\varepsilon'^2 \; ;$$

$$(3) \ldots\ldots \quad \delta nt=(H+H'+H'')\int(\varepsilon'^2-E'^2)dv \; .$$

Cela posé il faudra, non *supprimer* mais, au contraire, *ajouter* les termes que Vous voyez au commencement de la page 5 de mon Supplément au coefficient $C=0,008846291$, donné dans la page 2. En réduisant en nombres ces termes additionnels l'on a:

$$\text{pour}\left\{\begin{array}{l} m^4 \;\ldots -0,0016729 \\ m^2e^2\ldots -0,0002051 \\ m^2\gamma^2\ldots -0,0000745 \\ b^4 \;\ldots -0,0000149 \end{array}\right\} \qquad \text{pour}\left\{\begin{array}{l} m^3 \;\ldots -0,0013550 \\ m^3e^2\ldots -0,0001222 \\ m^3\gamma^2\ldots +0,0000195 \\ mb^4\ldots +0,0000050 \end{array}\right\}.$$

En désignant par ΔC la somme de ces fractions on obtient

$$\Delta C = -0,0034201 \ .$$

De sorte que

$$C + \Delta C = +0,005426191 \ .$$

Et comme

$$1264'', 127 \times \Delta C = -4'', 3234 \ ;$$

il faudra remplacer le coefficient $-11'', 51157$, donné dans la page 3, par le coefficient $-7'', 18817$.

Ce coefficient est encore trop grand d'environ $1'', 5$ à raison des termes du *sixième* et *septième* ordre, appartenans à l'intégrale

$$-2m^2 \int \partial R' dv$$

qui ne se trouvent pas dans le § IV de mon Supplément. Alors l'on a:

$$-7'', 1 + 1'', 5 = -5'', 70 \ ;$$

c'est-à-dire le résultat de M.r ADAMS. Il faudra l'adopter, si l'objection que je me suis faite sur le mode d'intégration par lequel on trouve les termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ peut être démontré comme tout-à-fait *légitime*. Et sur ce point, je n'ose pas dans ce moment me prononcer avec assurance. J'ignore, si la manière de poser ainsi la discussion, en la portant sur le *second* coefficient différentiel $\frac{d^2.\partial nt}{dv}$, a été faite par d'autres avec cette clarté qui peut devenir accessible à mon intelligence. Mais je me fais un devoir de Vous la communiquer, afin de Vous offrir une preuve de ma sincérité, et du désir que j'ai de dissiper les erreurs que je puis avoir commises, dès que je puis les reconnaître.

Maintenant je vois toute la gravité et toute l'importance de ma formule générale (D^{IV}) que j'avais établie à la page 45 de mon Supplément. En la réduisant aux deux termes

$$\partial u = A\varepsilon'^{g} \cos.(kv + \beta - g\lambda') - \frac{\left(A + \frac{B}{2k^2}\right) 2kg.\varepsilon'.^{g-1}}{(k^2 - i^2)} \cdot \frac{d\varepsilon'}{dv} \sin.(kv + \beta - g\lambda'),$$

et écrivant $2kg$ au lieu de $2k$ (qui s'y trouve par pure faute typographique), elle donne immédiatement les trois termes multipliés respectivement par $\frac{95}{12}$, $\frac{19}{24}$, $-\frac{133}{24}$ que Vous voyez dans la formule (14),

en y faisant $k=2$, $k^2-i^2=3$; $g=2$ pour l'argument $2Ev$; $g=1$ pour les argumens $2Ev+c'mv$, $2Ev-c'mv$; et

$$B=-\frac{15}{2}\ ;\ H=-\frac{15}{4}\ ;\ B=-\frac{3}{2}\ ;\ H=-\frac{3}{4}\ ;\ B=\frac{21}{2}\ ;\ H=\frac{21}{4}\ ;$$

pour les argumens $2Ev$, $2Ev+c'mv$, $2Ev-c'mv$, respectivement.

J'avais tort de dire qu'il fallait *supprimer* les termes produits par cette formule; au contraire il faut les *ajouter* aux autres que j'avais retenus dans mon calcul numérique. Ainsi, après avoir corrigé l'erreur typographique qui s'était glissée dans la page 61 du 1.er Volume de ma Théorie de la Lune, Vous voyez, que, à l'aide de mes *propres formules*, je puis trouver un résultat très-approchant de celui de M.r ADAMS par la considération des termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, dont LAPLACE avait le premier reconnu l'existence (Voyez la page 214 du Tome 3.ème de la Mécanique Céleste).

Je Vous prie de publier cette lettre avec les deux précédentes du 12 et 14 de ce même mois de Juin, afin que les Savans sachent par quel enchaînement d'idées je suis parvenu à retorquer en sens contraire la partie du coefficient de l'équation séculaire que j'avais donnée à la page 5 de mon Supplément.

Tout à Vous etc.

Turin, 19 Juin 1860

Mon cher M.r LUBBOCK?

Je pense que Vous avez reçu ma dernière lettre du 17 de ce même mois de Juin. Mais cela ne suffit pas: la lecture de la Réplique de M.r ADAMS, publiée aux pages 279, 280 du N.° 7 des *Monthly Notices* (Vol. XX), m'a fait réfléchir qu'on pouvait la présenter d'une manière plus pressante et plus décisive d'après les considérations suivantes.

Maintenant il est, je crois, démontré que, en bornant la recherche aux développemens, on doit regarder comme une vérité *mathématique*, que

$$\left[\frac{3}{2}m^2-\left(\frac{351}{64}+\frac{855}{16}=\frac{3771}{64}\right)m^4\right]\int dv\,(\varepsilon'^2-E'^2)$$

sont les deux premiers termes du coefficient de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune. Et cela de manière que la partie plus

grande $-\frac{855}{16}m^4$ du second terme est, de toute force, due à l'existence des trois termes périodiques

$$+\frac{95}{12}m^2.\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.2Ev\ ; \qquad +\frac{19}{24}m^2.\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.2Ev+c'mv\ ;$$
$$-\frac{133}{24}m^2.\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv)\ ;$$

qui entrent dans l'expression de δu, conformément à ma formule générale (D^{IV}) posée à la page 45 de mon Supplément. Donc, en faisant abstraction de cette partie, on doit, de toute force, trouver $-\frac{351}{64}m^4$ pour la seule première partie. Et si on parvient à un résultat *différent*, il faudra regarder comme fautif le calcul qui l'aura produit. En appliquant cette simple remarque au terme $-\frac{5337}{128}m^4$, que M.r G. De Pontécoulant donne à la page 276 du N.° 7 cité, j'en tire la conséquence qu'il est absolument inadmissible. Car s'il était exact (par hypothèse) l'on aurait

$$-\left(\frac{5337}{128}+\frac{855}{16}=\frac{12177}{128}\right)m^4$$

pour le second terme en question, en lui ajoutant la partie $-\frac{855}{16}$ que M.r Pontécoulant n'a pas voulu prendre en considération à cause de l'*étrangeté* (suivant Lui) des termes périodiques qui la produisent. Cela posé si l'on observe que

$$-\frac{5337}{128}=-\frac{702}{128}-\frac{4635}{128}=-5,5-36,2$$

on reconnait aussitôt que M.r Pontécoulant a trouvé

$$-5,5-36,2=-41,7$$

au lieu du nombre $-5,5$ qu'aurait donné un développement de ses fonctions exécuté avec toute l'exactitude.

Le véritable nombre étant $-\frac{351}{64}-\frac{855}{16}=-53,4$, il est manifeste que la *double erreur* commise, en prenant $-41,7$, au lieu de $-5,5$, et en négligeant la partie $-\frac{855}{16}$ a dû produire une compensation. Telle

est la cause radicale qui a fait trouver à M.r Pontécoulant le coefficient $7'', 99218$ à la page 277 du N.° 7 cité. Ceux qui croiraient ce nombre exact, diraient que la partie $-\frac{855}{16}m^4$, non considérée par M.r Pontécoulant, devant produire une *diminution* de $2'', 132$ sur le nombre $7'', 99218$, l'on aura, pour le véritable résultat fourni par son analyse, $7'', 99218 - 2'', 131 = 5'', 88$. Et par un tel calcul, absolument faux, dans ses parties intégrantes, on se ferait illusion au point de croire à l'abri de toute objection le développement de M.r Pontécoulant, exécuté en prenant le temps t, et non la longitude v de la Lune pour la variable indépendante. Cette dernière considération, présentée comme sérieuse par M.r Pontécoulant, ne saurait infirmer la double erreur que je viens de signaler.

En effet; en appliquant à l'équation

$$v = (nt + \varepsilon - \int \zeta n dt) - F(v)$$

la formule du retour des suites de Lagrange, on voit, sans aucun calcul, que la *différentiation* rend tout-à-fait insensibles les termes séculaires de la forme $G\varepsilon'^2$, qui naissent dans $[F(v)]^2$, $[F(v)]^3$, etc., puisqu'elle détruit le signe intégral.

Ainsi, l'analyse algébrique suffit pour faire tomber l'objection que M.r Pontécoulant exprime à la page 274 avec une imperturbable assurance. Il faut cependant l'excuser; car il n'est pas facile d'avoir présentes à l'esprit toutes les circonstances qui concourent à la formation de toutes les quantités d'une forme déterminée, dont on demande l'évaluation numérique et définitive. M.r Pontécoulant, par exemple, aurait pu trouver les $(2'', 5)$ dont il avait besoin pour diminuer le nombre $7'', 9918$, en remarquant que le terme $-\frac{855}{16}m^4$ de M.r Adams lui donnait à fort peu-près cette quantité $(-2'', 13)$; et alors, par cette heureuse inspiration, il se serait abstenu de publier à la page 277 du N.° 7 la période, qui atteste, de sa part, une préoccupation nullement affaiblie par mon Supplément. Voici ce période:

« Il résulte comme une conséquence désormais *incontestable* de notre
» analyse que la méthode jusqu'ici employée par les Géomètres et les
» Astronomes pour déterminer par la théorie le coefficient de l'équation
» séculaire du moyen mouvement lunaire, tendait à *augmenter* de $2'', 50$

» à-peu-près le coefficient de cette inégalité; on doit donc accueillir avec
» une extrême réserve toutes les évaluations fondées sur l'emploi de ces
» formules défectueuses ».

Les *trois* premiers termes des équations (k'') et (k'''), que Vous voyez dans la page 40 de mon Supplément, doivent être

$$\frac{21}{8}m^2+\frac{825}{32}m^3+\left(\frac{61755}{256}-\frac{3771}{128}=\frac{54213}{256}\right)m^4 \quad \text{pour} \quad (k'') \; ;$$

$$\frac{3}{8}m^2+\frac{33}{32}m^3+\left(\frac{2685}{256}-\frac{3771}{128}=-\frac{4857}{256}\right)m^4 \quad \text{pour} \quad (k''') \; .$$

Il est beau de voir ainsi, que le troisième terme de la partie séculaire de l'argument de la latitude doit *changer de signe*, et acquérir une valeur absolue *presque double*.

Les équations numériques données par M.r Hansen à la page 15 ne laissent pas voir une telle conséquence de la loi de la gravitation. Le calcul intégral peut, seul, détruire les illusions des calculs arithmétiques.

En voici une preuve qui me paraît assez frappante. Suivant la Théorie, le rapport

$$\frac{\int \varpi dv+\int \zeta dv}{\int \zeta dv}$$

de la somme du mouvement séculaire du périgée et de la longitude, à celui de la longitude est égal à

$$\frac{0,0318725+0,005426191}{0,005426191}=7,05830 \; .$$

Donc, en faisant :

$$\cos. 5^\circ. 8'. 40''(7,05830).\int \zeta dv=49'',435 \; ,$$

comme M.r Hansen à la page 15 de son ouvrage; cela revient à dire, qu'il fait (sans déclaration explicite)

$$\int \zeta dv=\frac{49'',435}{7,05830.\cos.(5^\circ. 8'. 40'')}=7'',0321 \; ;$$

c'est-à-dire $7'',0321+1'',121=8'',1531$ pour le mouvement séculaire et tropique de la longitude. Ainsi, cette détermination empirique donne un coefficient de l'équation séculaire du moyen mouvement sidéral, qui surpasse de $1'',33$ celui de $5'',70$ fourni par la Théorie. Mais la Théorie apprend, en outre, que le rapport

$$\frac{\int \varpi dv - \int \theta dv}{\int \zeta dv}$$

de la somme du mouvement séculaire du périgée et du nœud à celui de la longitude, doit être $6,05830 + 0,99333 = 7,05163$.

Donc, en vertu du rapport $\frac{7,05830}{7,05163} = 1,00093$, M.r Hansen devait prendre $-\frac{49'',435}{1,00093} = -49'',3887$, et non $-44'',323$, pour le coefficient de $\left(\frac{t-1800}{100}\right)^2$ dans sa valeur de ω, posée dans la même page 15, puisqu'à la page 5 il définit ω par la distance du périgée lunaire au nœud ascendant.

La Théorie donne $\frac{0,005389996}{0,005426191} = 0,99333$ pour le rapport du mouvement séculaire du nœud au mouvement séculaire de la longitude. Donc $7'',0321 \times 0,99333 = 6'',9852$ serait le coefficient de l'équation séculaire du nœud, correspondant au coefficient $49'',435$ de l'anomalie moyenne de la Lune. Mais M.r Hansen qui supposait, par une espèce d'empirisme; $\int \zeta dv = 12'',12$; et (d'après ma simple conjecture) $0,58317$, au lieu de $0,99333$, trouvait $12'',12 \times 0,58317 = 7'',068$, au lieu de $6'',9852$; c'est-à-dire $7'',068 + 1'',121 = 8'',189$ pour le mouvement séculaire et tropique du nœud.

Si je ne me trompe, il me paraît que M.r Hansen croyait, à fort peu-près, exact le rapport $4,00052$, donné par Laplace à la page 237 du Tome 3.ème de la Mécanique Céleste; et qu'il fallait substituer au rapport $0,735452$, donné dans la même page, le rapport $0,58317$. Mais, peut-être, je ne devine pas la pensée même de M.r Hansen.

Il est curieux de voir le produit $4 \times 12'',12 = 48'',48$, formé par *deux* facteurs fautifs, *en sens contraire*, donner un coefficient, qui se rapproche néanmoins du produit $7,058 \times 5'',7 = 40'',23$ fourni par les deux facteurs véritables. Mais, si le rapport $\frac{48'',48}{40,23} = 1,2$ est une grossière approximation, il faut convenir que les différences

$$7,058 - 4 = 3,058 \;; \qquad 12'',12 - 5'',70 = 6'',42$$

sont tout-à-fait intolérables, comme conséquences de la loi de la gravitation universelle.

On peut faire une remarque analogue sur les produits

$$12'', 12 \times 0{,}58317 = 7'', 068 \;; \quad 5'', 70 \times 0{,}999333 = 6'', 9953 \;,$$

dont la proximité contraste avec la grande différence entre les facteurs dont ils sont composés. L'effet des puissances supérieures de la force perturbatrice se fait ici sentir avec autant, et même plus de force, que dans le cas du mouvement progressif du périgée, dont CLAIRAUT a donné le premier l'explication à jamais mémorable.

En examinant, sous un semblable point de vue, les valeurs *séparées* des facteurs qui composent les coefficiens des inégalités lunaires, on est souvent surpris des écarts qu'ils présentent, malgré l'espèce de compensation fortuite qui s'opère dans leur produit. C'est de quoi j'ai offert un exemple remarquable aux pages 16 et 17 de mon 3.ème Volume, en discutant les facteurs du coefficient de l'inégalité parallactique, propre à déterminer, comme on le sait, la parallaxe du Soleil. Alors on voit qu'il ne suffit pas de savoir que, par la Théorie, on a trouvé ce coefficient égal à $-121'', 368$: il faut, en outre, avoir séparément la valeur de chacun des trois facteurs qui concourent à la formation de ce nombre. Ma formule donne à très-peu-près

$$-122'', 395 . \cos. 5^{\circ}. 8'. 40'' = -121'', 902$$

en prenant $\frac{1}{80}$ pour la masse de la Lune au lieu de $\frac{1}{87}$.

En réfléchissant sur les résultats posés aux pages 494, 582, 612, 624 du premier Volume de ma Théorie de la Lune, relativement à ce coefficient, on pourra se faire une idée de la *différence intrinsèque* qu'il y a entre une solution *littérale* et une solution *numérique* de ce problème. Sa solution *numérique* n'avance pour rien la recherche théorique de la *parallaxe du Soleil*: elle demeure au même point où elle était lorsque BÜRG avait trouvé (d'après l'observation) $-122'', 5$ pour ce même coefficient. Si l'on veut méconnaître cette *différence intrinsèque*, et même l'abandonner et la déprécier, en disant que: « Evolutio analytica semper » fallax est », on aura fait un pas que la postérité jugera rétrograde; quelle que soit d'ailleurs la perfection attribuée à de telles Tables. Car une véritable Théorie de la Lune doit donner non-seulement les fonctions des éléments des deux orbites qui fournissent les inégalités *sensibles*; mais elle doit, en outre, donner l'expression des coefficiens appartenants

à des inégalités qui deviennent *insensibles* par les effets de la force perturbatrice, ainsi que cela arrive, par exemple, aux deux inégalités ayant $2gv-2cv$, $Ev+c'mv-cv$ pour argument.

Il est aisé de sacrifier une *utilité scientifique*, qu'il est difficile de savoir apprécier avec justesse, aux dépens d'une *utilité pratique*, qui peut être prônée par plusieurs personnes avec l'apparence de faire acte de pure justice.

La solution *numérique* du problème de l'équation *séculaire du moyen mouvement de la Lune* est encore une de celles, qui était impuissante pour décider cette question, si elle n'était pas accompagnée de la solution *littérale*. Et les résultats posés par M.r Hansen, vers la fin de la page 15 de son ouvrage, ont été absolument inutiles, du moins pour moi, pour me faire revenir de l'erreur où j'étais il y a trois jours. Les discussions qui se sont élevées depuis quelques mois dans le sein de l'Académie des Sciences de Paris, au sujet de l'équation séculaire, seront à l'avenir citées comme une preuve que la *solution numérique* de M.r Hansen n'avait pas répandu la moindre lumière sur ce problème.

Analytiquement parlant, il est permis de dire qu'il y a une espèce d'empirisme dans la détermination *numérique* des coefficiens des inégalités lunaires, d'après la loi de la gravitation, lorsque, pour satisfaire aux équations de condition, on emploie les coefficiens du mouvement du périgée et du nœud donnés par l'observation, sans avoir préalablement tiré de la Théorie les fonctions des élémens des deux orbites qui les déterminent. C'est ainsi que Laplace, à la page 231 du 3.ème Volume de la Mécanique Céleste, fait d'avance $c=0,99154801$; $g=1,00402175$. De sorte que, par là, on ne saurait regarder comme un *pur* résultat de la Théorie ses valeurs $c=0,991567$; $g=1,0040105$ qu'il obtient à la page 236. C'est en ce sens que je crois entachées d'empirisme les Théories de la Lune, où il y a quelques traces d'un semblable procédé.

A cette valeur de c, ainsi déduite, on pourrait adresser, jusqu'à un certain point, le reproche amer, que Euler en 1753 exprimait par les mots: « Ac si non defuere, qui sibi persuaserunt, motum apogei cum » Theoria Neutoniana consentire, ii plerumque, per errorem calculi se- » ducti, ad veritatem pervenisse sibi sunt visi » (page 217).

Dire, comme M.r Hansen à la page 238 de son Ouvrage publié en 1838, que l'*Evolutio analytica semper fallax est*, à canse des coefficiens numériques absolus qui multiplient les quantités littérales, c'est avancer

une proposition, qui me paraît démentie par le fait dans mon ouvrage, aux pages 618, 619 ... 627, puisque, en général, l'on y voit le décroissement progressif des termes, à mesure qu'ils sont l'évaluation de quantités algébriques d'un ordre plus élevé. Le coefficient de l'*Évection*, par exemple, dont la valeur totale est de 4585",6, est composé de manière, que la partie du *second ordre* s'élève à 3173",4; celle du *troisième* à 1040",4; celle du *quatrième* à 295"; ... et enfin, la partie du *huitième ordre* à 0",107.

Une remarque analogue est appliquable à d'autres inégalités dont les coefficiens sont composés de plusieurs parties.

L'objection que M.r Hansen semble m'adresser dans la page VIII de son Introduction en y citant mon coefficient

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{135}{64}\cdot m\right)e^2\gamma^2\ ,$$

aurait perdu une grande partie de sa force s'il avait remarqué que dans le même premier Volume (à la page 618) j'ai donné aussi la valeur numérique du troisième terme; de sorte que

$$+0''.629+0''.794-0''.344=1'',079$$

sont les trois parties que j'ai calculées; parce que je voyais les deux premières parties, l'une et l'autre *positive*. Si elles eussent été affectées d'un *signe contraire*, ainsi que cela a lieu à l'égard de l'inégalité *du même ordre et du même genre*,

$$\sin.Ev+c'mv-cv.ee'b^2.\left(-\frac{25}{8}+\frac{1095}{32}\cdot m-\frac{15}{4}\cdot\frac{\gamma^2}{m}\right)$$
$$=\sin.Ev+c'mv-cv.(-1'',498+1'',032=-0'',466)\ ,$$

je n'aurai pas calculé la partie de l'ordre subséquent (Voyez les pages 494 et 612 de mon 1.er Volume).

Quelle est la méthode capable de donner les termes suivans, ou seulement leur somme, *avec certitude et facilité*, à l'égard des argumens dont l'ordre s'abaisse par les facteurs acquis en vertu de l'intégration? Je l'ignore; à moins de vouloir introduire, de prime abord, dans l'intégration des équations les valeurs des constantes c et g, qui sont elles-mêmes des fonctions très-compliquées des élémens, propres à déterminer les mouvemens *moyens et séculaires* du *périgée* et du *Nœud*. Mais, alors

la solution *littérale* que je demande est, de prime abord, abandonnée. Il importe d'observer, que l'inégalité

$$A.\sin.(3Ev + 3c'mv - 2gv - cv) \;,$$

où $E = 1 - m = 1 - \frac{1}{13}$, est telle que le coefficient A doit être de la forme

$$\frac{Hm^4 e'^3 e\gamma^2 b^2}{(3E + 3c'm - 2g - c)^2} \;,$$

H étant un coefficient numérique absolu; et *non* de la forme

$$\frac{Hm^3 e'^3 e\gamma^2 b^2}{(3E + 3c'm - 2g - c)^2} \;,$$

comme LAPLACE le dit à la page 291. Car, le terme multiplié par m^3 est composé de *plusieurs parties*, qui se réduisent à zéro par leur destruction mutuelle. De-là il arrive, que le numérateur littéral du coefficient est une quantité du *douzième* et non du *onzième* ordre. De sorte que l'inégalité ayant pour argument $3Ev + 3c'mv - 2gv - cv$ doit être rangée parmi celles du *sixième* ordre, puisque le dénominateur

$$(3E + 3c'm - 2g - c)^2 = (0,000425)^2$$

est une quantité du *sixième* ordre. Or l'on a

$$\frac{m^4 e'^1 e\gamma^2 b^2}{(3E + 3c'm - 2g - c)^2} = \frac{1}{(13)^4} \cdot \frac{0'',00043616}{(0,000425)^2} \cdot \frac{1}{400} = \frac{1''}{4716} \;.$$

Ainsi, pour avoir $\frac{H.1''}{4716} = 18''$, comme LAPLACE le dit à la page 178, il faudrait avoir $H = 4716 \times 18$; ce qui est absolument impossible, en observant que, sans connaître le coefficient H, on peut affirmer que sa valeur absolue doit être plus petite que le nombre

$$\frac{1}{3E + 3c'm - 2g - c} = \frac{1}{0,000425} = 2353 \;.$$

L'inégalité définie par LAPLACE à la page 290 du 3.e Volume de la Mécanique Céleste, avait été remarquée par D'ALEMBERT (Lisez les pages 17 et 409 du VI.e Volume de ses Opuscules). Mais D'ALEMBERT ne voyait pas la liaison intime qu'il y a entre la forme des argumens et la forme algébrique des coefficiens qui les affectent; ou, du moins, il ne

la voyait pas assez distinctement. Car à la page 18 du même Volume il dit seulement: « Ces deux quantités ou coefficiens ayant une sorte de » dépendance l'un de l'autre ». La théorie rend inadmissible l'inégalité du *septième* ordre

$$+4'',7.\sin.(3E.nt+3c'm.nt-2g.nt)$$

dans l'expression de la longitude vraie de la Lune en fonction de sa longitude moyenne, proposée par Burckhardt dans le Tome IX des Mémoires de l'Institut de France. Car, l'expression analytique de son coefficient serait de la forme

$$\frac{H'm^2e'^1\gamma^2b^2}{(1+\frac{3}{4}m^2)-(3E+3c'm-2g)^2};$$

H' désignant un coefficient numérique, qui doit être moindre que

$$\frac{1}{(1+\frac{3}{4}m^2)-(3.-2g)^2};$$

c'est-à-dire moindre que 41. Et comme l'on a

$$\frac{m^2.e'^1\gamma^2b^2}{(1+\frac{3}{4}m^2)-(3E+3c'm-2g)^2}=\frac{1}{(13)^2}\cdot\frac{0'',0079523}{0,0244}\cdot\frac{1}{400}=\frac{0'',1988}{41226},$$

il faudrait attribuer au nombre H' l'énorme grandeur du nombre $412260\times2,4=989424$, pour obtenir un coefficient égal à $+4'',7$.

Concluons de là que, mathématiquement parlant, l'action du Soleil introduit les deux inégalités

$$3Ev+3c'mv-2gv-cv, \qquad 3Ev+3c'mv-2gv;$$

mais que, en vertu de cette même action, elles sont absolument insensibles.

Pour offrir un exemple frappant, que l'*Evolutio analytica* n'est pas *semper dubia et fallax*, comme le dit M.r Hansen, je puis citer le cas de la plus grande inegalité du *cinquième ordre* qui s'élève à 3'', ayant pour argument $4Ev-c'mv-cv$; elle naît du carré de la force perturbatrice par la combinaison des deux argumens $2Ev-c'mv$, $2Ev-cv$. Le premier terme de son coefficient est de la forme $Am^3e\varepsilon'$; où $e\varepsilon'$ est le produit des deux excentricités; $m=\frac{1}{13}$, et A un coefficient numérique absolu. Ainsi ce produit est dans le sens analytique du *cinquième* ordre. Mais la théorie donne $A=\frac{175}{8}=22$. À l'aspect de la grandeur

de ce nombre, j'ai calculé non seulement le second, mais aussi le troisième terme; ce qui m'a donné (voyez la page 496 de mon 1.er Volume):

$$e\varepsilon'\left(\frac{175}{8}\cdot m^3+\frac{122869}{768}\cdot m^4+\frac{922711}{1152}\cdot m^5\right)$$

pour l'expression algébrique de ce coefficient. En la réduisant en nombres (voyez la page 613), on a ces trois parties *décroissantes*, savoir:

$$+1'',741+0'',952+0'',358=3'',0513 .$$

En la considérant avec attention, on ne saurait qualifier de *dubia et fallax* une telle détermination théorique (*).

Pour exprimer d'une manière plus positive mon opinion sur les *solutions numériques* des perturbations lunaires, je suppose que, par le choc d'une Comète, les quatre élémens primitifs m, e, γ et b^2 ont subi chacun une petite altération et sont devenus $m+\delta m$, $e+\delta e$, $\gamma+\delta\gamma$, $b+\delta b$, respectivement. Alors, la solution numérique qui a donné le nombre $-121'',368$ pour le coefficient de l'inégalité parallactique ne pourra pas être modifiée en conséquence sans refaire un nouveau calcul assez pénible. Mais, d'après ma formule posée à la page 494 de mon 1.er Volume, je vois aussitôt, qu'en désignant cette inégalité par $b^2.mH\sin.E v$, la variation du coefficient $b^2.mH$ sera $b^2.H\delta m+2mHb\delta b+mb^2.\delta H$, où l'on aura:

$$\delta H=\left(\frac{15}{8}+\frac{93}{4}m+\frac{5319}{2m}m^2+\ldots\ldots\right)+\frac{15}{4}e\delta e-\frac{165}{16}\gamma\delta\gamma .$$

Avec cela on peut facilement calculer le nouveau coefficient qui doit être substitué au premier. Si cette manière de voir la solution *littérale* du problème des trois corps n'était pas appréciée, il faudrait renoncer à l'espoir de voir avancée la *Théorie* de la Lune. Car, une solution numérique n'apprend absolument rien sur le mode de découvrir, au moins par un développement, le *grand nombre* des fonctions d'un *petit nombre d'élémens* qui embrassent toutes les inégalités lunaires, soit périodiques, soit séculaires.

La solution numérique de LAPLACE, par exemple, pour l'inégalité

(*) Ces dernières réflexions sont copiées d'une lettre datée du 16 octobre 1857, que j'ai adressée à Monsieur BIOT.

$b'.mH.\sin.Ev$, est entachée de plusieurs erreurs théoriques graves, que j'ai signalées aux pages 17 et 18 de mon 3.ème Volume. C'est là que j'ai dit et que je répète ici: « Qu'on espère en vain une Théorie de la Lune » solidement établie sans considérer toutes les combinaisons qui amènent » dans les équations différentielles toutes les quantités du même ordre » que celles auxquelles on se propose d'avoir égard. C'est ensuite le » degré plus ou moins grand de convergence de chaque série qui fixera » l'ordre jusqu'auquel les développemens doivent être poussés pour avoir » en dernière analyse un résultat numérique, renfermé entre les limites » des quantités sensibles ». Il n'y a pas de comparaison entre la difficulté d'une solution ainsi conduite, et celle de faire une Théorie de la Lune, suffisante pour construire des Tables assez précises pour servir à la solution du problème des longitudes. Il est impossible de se faire une idée un peu exacte de la première des deux difficultés dont je parle, sans avoir soi-même parcouru l'immense Océan qui sépare le point de départ et le point d'arrivée .... « *forsan et haec olim meminisse* » *juvabit* ».

Quelle que soit l'utilité d'une solution numérique des perturbations lunaires, elle laissera toujours à la Science le désir de pouvoir construire des Tables de la Lune aussi parfaites «*uniquement fondées sur la Théorie*». C'est par ces mots que LAPLACE, à la page 358 du 5.ème Volume de la Mécanique Céleste, a fermé l'éloge, justement mérité, qu'il a fait des Tables de MAYER, rectifiées par MASON. Et le but d'avoir des Tables aussi parfaites, uniquement fondées sur la Théorie, ne peut être atteint que par une *solution littérale*. Telle est du moins mon opinion, renforcée et non affaiblie par les Tables de M.r HANSEN. En toute rigueur, on peut les ranger dans le nombre de celles, que EULER disait: « *Non tam* Theoriae » *quam* observationibus *sunt superstructae* »; et ajouter avec lui: « *Huius-* » *modi ergo Tabularum sive consensus, sive dissensus cum observationibus,* » *neque ad Theoriam Newtonianam plenissime confirmandam, neque ad* » *eam infringendam allegari potest; nam quatenus istae Tabulae obser-* » *vationibus satisfaciunt, hoc non solum Theoriae est tribuendum; qua-* » *tenus autem cum observationibus minus conveniunt, hoc ne Theoriae* » *quidem imputari potest; propterea quod istae Tabulae non soli Theoriae* » *innituntur* ».

Suivant les Tables de M.r HANSEN, en fixant l'origine du temps à Midi moyen de l'année 1800, sous le Méridien de Greenwich, on aura

$\varepsilon = 335°. 43'. 26'', 7$;	$\varepsilon - \varpi_{,} = 110°. 19'. 33'', 6$;
$\theta_{,} = 33°. 16'. 31'', 2$;	$\varepsilon_{,}' = 280°. 23'. 13'', 6$;
$360° - \theta_{,} = 326°. 43'. 28'', 8$;	$\varkappa' = 279°. 29'. 3'', 0$;
$\varpi_{,} = 225°. 23'. 53'', 1$;	$\varkappa' - \theta_{,} = 246°. 13'. 32'', 0$.
$\varpi_{,} - \theta_{,} = 192°. 7'. 21'', 9$;	

Tels sont les élémens qu'il faudrait substituer à ceux posés à la page 634 du premier Volume de ma Théorie de la Lune.

Tout à Vous etc.

Addition à la Lettre du 17 Juin.

Dans le second membre de l'équation (D'), donnée à la page 44 de mon Supplément, on doit entendre que pv tient la place de $p(v+\delta v)$, en y supposant

$$\delta v = \Sigma.\, U \sin.(k'v+\beta'-g'\tau')\ ,$$

où le signe $.\Sigma.$ comprend tous les termes périodiques posés aux pages 487-496 de mon 1.er Volume. Par là, le second membre de l'équation (D') sera augmenté de cette fonction de v; savoir:

$$-\delta v H.\Sigma.\, Mp.\sin.(kv+\beta-pv-q)\ ;$$

$$-\delta v B.\Sigma.\frac{Mp}{k-p}\cdot\sin.(kv+\beta-pv-q)\ .$$

Donc, en négligeant le carré de p, cette fonction sera équivalente à

$$-\delta v\left(H+\frac{B}{k}\right)\sin.(kv+\beta).\frac{d.[\varepsilon'^{g}\sin.g\tau']}{dv}\ ;$$

$$-\delta v\left(H+\frac{B}{k}\right)\cos.(kv+\beta).\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g\tau']}{dv}\ .$$

Et en négligeant les termes multipliés par $\frac{d\tau'}{dv'}$ elle se réduit à

$$-\delta v\left(H+\frac{B}{k}\right)g.\varepsilon'^{g-1}.\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(kv+\beta-g\tau')$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(H+\frac{B}{k}\right)g.\varepsilon'^{g-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}.\Sigma.\,U\sin.\left[(k'+k)v+\beta'+\beta-(g'+g)\tau'\right]$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(H+\frac{B}{k}\right)g.\varepsilon'^{g-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}.\Sigma.\,U\sin.\left[(k'-k)v+\beta'-\beta-(g'-g)\tau'\right]\ .$$

De sorte, qu'il faudra ajouter au second membre de l'équation (D^{IV}) les termes

$$-\left(\frac{g}{2}H+\frac{B}{k}\right)\varepsilon'\varepsilon^{-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}.\Sigma.\frac{U\sin.[(k'+k)v+(\beta'+\beta)-(g'+g)\tau']}{(k'+k)^2-i^2};$$

$$-\left(\frac{g}{2}H+\frac{B}{k}\right)\varepsilon'\varepsilon^{-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}.\Sigma.\frac{U\sin.[(k'-k)v+(\beta'-\beta)-(g'-g)\tau']}{(k'-k)^2-i^2}.$$

On obtiendra les termes correspondans de δnt à l'aide de l'équation

$$\frac{d.\delta nt}{dv}=-2\delta u+m^2\int\delta R'dv+\text{etc.}$$

Ensuite, il faudra calculer la partie, née de l'existence de ces termes, qui complète les coefficiens H' et H'' dans mon équation désignée par (3).

En écrivant la lettre du 17, j'étais principalement préoccupé du second terme du coefficient de l'équation séculaire du moyen mouvement, sur lequel cette dernière partie de δu ne peut avoir aucune influence. Mais, pour mieux fixer les idées, à l'égard des termes d'un ordre supérieur, j'ai voulu faire cette addition avant de finir cette lettre.

Toutefois je ne puis pas m'empêcher d'ajouter aux réflexions précédentes encore celle-ci, dont l'idée me vient dans ce moment. Le mouvement *révolutif* d'un pendule, dans le *vide*, n'offre aucune difficulté pour une solution numérique, propre au calcul de l'arc circulaire ψ, parcouru dans un temps donné t. Mais sa solution *littérale*, trouvée par Jacobi, un siècle après la mort de Newton, et exprimée par l'équation

$$\psi=Nt+4.\sum_{1}^{\infty}.\frac{q^i}{i(1+q^{2i})}.\sin.iNt;$$

$$N=\frac{\pi}{K}.\sqrt{\frac{gH}{2L^2}};\quad k^2=\frac{2L}{H};\quad q=e^{-\pi\frac{K'}{K}};\quad k'^2=1-k^2;$$

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2.\sin.^2\varphi}};\qquad K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2.\sin.^2\varphi}};$$

où L désigne la longueur du pendule, g la gravité, H la hauteur due à la vitesse dans le point plus bas, e la base des Logarithmes hyperboliques; et

$$K=\frac{\pi}{2}\cdot\left\{1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4+\text{etc.}\right\}\ ;$$

$$K'=\frac{\pi}{2}\cdot\left\{1+\frac{1^2}{2^2}k'^2+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k'^4+\text{etc.}\right\}\ ,$$

pouvait seule embrasser toute la variété des circonstances initiales. A l'aspect d'un tel mouvement, un Physicien pourrait déterminer la valeur de N. Mais la valeur littérale des coefficiens de la série composée de termes périodiques, ne serait nullement connue par les Tables d'un tel mouvement.

Turin, 11 Juillet 1860

Mon cher M.r Lubbock?

Je m'empresse de Vous communiquer une correction qui doit être faite à un de mes coefficiens numériques, posés à la page 485 du 1.er Vol.e de ma Théorie de la Lune. Je dois à M.r le Comte De Pontécoulant de m'avoir fait observer, par une lettre datée du 8 de ce même mois, qu'on doit changer le *signe* du coefficient $\frac{1083}{512}$, et lire dans l'expression de $\int \zeta d v$:

$$+\gamma^2\left(\frac{525}{128}m^2-\frac{1083}{512}m^3\ldots\ldots\right)$$

au lieu de

$$+\gamma^2\left(\frac{525}{128}m^2+\frac{1083}{512}m^3\ldots\ldots\right).$$

Il s'est borné à me dire: « *on doit avoir je crois* $-\frac{1083}{512}m^3\gamma^2$ *dans le* » *coefficient de l'équation séculaire* », sans citer ni le Volume, ni la page; mais j'ai aussitôt reconnu que la source de l'erreur de signe se trouve dans la page 320 de mon troisième Volume. Là, dans la valeur de $2H'+G'$, il y a

$$+\left(\frac{237}{512}-\frac{165}{64}=\frac{1083}{512}\right)$$

au lieu de

$$-\left(\frac{237}{512}-\frac{165}{64}=\frac{1083}{512}\right).$$

Ainsi il est manifeste, que dans la valeur de $\frac{1}{n}\cdot\int\zeta dv$, posée dans la même page 320, on doit lire

$$+\gamma^2\left(\frac{525}{128}m^2-\frac{1083}{512}m^3\ldots\ldots\right),$$

et que dans la page suivante 321, où il y a la valeur de $\int\zeta dv$, on doit aussi lire

$$+\gamma^2\left(\frac{525}{128}m^2-\frac{1083}{512}m^3\ldots\ldots\right).$$

D'après cette correction il faut, dans la page 2 de mon *Supplément*, à la ligne 4, lire

$$+\gamma^2\left(\frac{525}{128}m^2-\frac{1479}{512}m^3-\frac{48183}{1024}m^4\right),$$

où

$$-\frac{1479}{512}=-\frac{1083}{512}-\frac{99}{128}.$$

Et comme, d'après ce que j'ai déclaré dans ma lettre du 17 Juin, on doit *ajouter* au terme $-\frac{1479}{512}m^3\gamma^2$, le terme $+\frac{2937}{512}m^3\gamma^2$, posé à la page 5 du même Supplément, l'on aura

$$\left(-\frac{1479}{512}+\frac{2937}{512}=+\frac{729}{256}\right)m^3\gamma^2$$

dans l'expression de $\int\zeta dv$. De sorte que la partie $+0,0002156{4}1\,(5)$ de la valeur de C doit être remplacée par $+0,000201281\,(5)$, en observant que

$$-\frac{1479}{512}m^3\gamma^2=\frac{687}{512}m^3\gamma^2-\frac{1083}{256}m^3\gamma^2,$$

et que

$$-\frac{1083}{256}m^1\gamma^2=-0,0000143606.$$

Alors l'on a

$$C=0,008846291-0,0000143606=0,008831931;$$

et par conséquent

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^2\left\{11'',49455+\ldots\ldots\ldots\right\},$$

au lieu de

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^2 \{11'',51157 + \ldots\ldots\ldots\}$$

dans l'équation désignée par (k') à la page 3 du Supplément. Et dans les équations désignées par (k'') et (k'''), à la page 40, on doit lire (respectivement):

$$+\gamma^2\left(\frac{237}{128}m^2 - \frac{4815}{256}m^3\right) ;$$

$$+\gamma^2\left(\frac{597}{128}m^2 - \frac{333}{256}m^3\right) .$$

La facilité avec laquelle on peut faire ces corrections pourrait être citée comme un des avantages inhérens à la solution *littérale* du problème des trois corps.

Tout à Vous etc.